

## 4.1 ΕΥΘΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

### ΘΕΩΡΙΑ

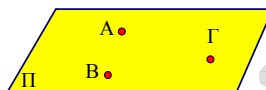
1.

**Το επίπεδο:** Είναι έννοια πρωταρχική για τα μαθηματικά δηλαδή έννοια που δεν επιδέχεται ορισμό. Η εικόνα του επιπέδου είναι γνωστή από την εμπειρία μας. Την έχουμε ταυτίσει με τη μορφή που έχει ένα λείο πάτωμα, ένας καθρέφτης, ο πίνακας του σχολείου μας κλπ.

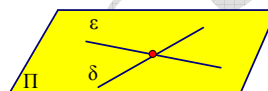
2.

**Στοιχεία που καθορίζουν τη θέση ενός επιπέδου**

- Από τρία μη συνευθειακά σημεία ορίζεται ένα μόνο επίπεδο.



- Από δύο τεμνόμενες ευθείες ορίζεται ένα μόνο επίπεδο.



- Από δύο παράλληλες ευθείες ορίζεται ένα μόνο επίπεδο.



**Σημείωση :** Κάθε επίπεδο προεκτείνεται απεριόριστα προς όλες τις κατευθύνσεις

3.

**Σχετικές θέσεις δύο διαφορετικών επιπέδων**

Δύο διαφορετικά επίπεδα ή είναι **παράλληλα** ή **τέμνονται**.

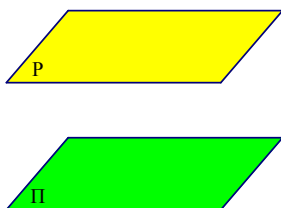
**Παράλληλα** είναι όταν **δεν έχουν** κοινά σημεία.

**Τέμνονται** όταν **έχουν** κοινά σημεία.

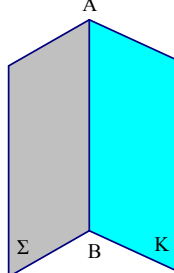
Όταν τα επίπεδα τέμνονται τα κοινά τους σημεία βρίσκονται σε μία ευθεία την οποία ονομάζουμε **τομή** των δύο επιπέδων.

στο παρακάτω σχήμα τα επίπεδα Π και Ρ είναι παράλληλα ενώ τα Σ και Κ τέμνονται

Παράλληλα επίπεδα



Τεμνόμενα επίπεδα



Η ευθεία AB είναι η τομή των επιπέδων Σ και Κ

4.

**Σχετικές θέσεις δύο διαφορετικών ευθειών**

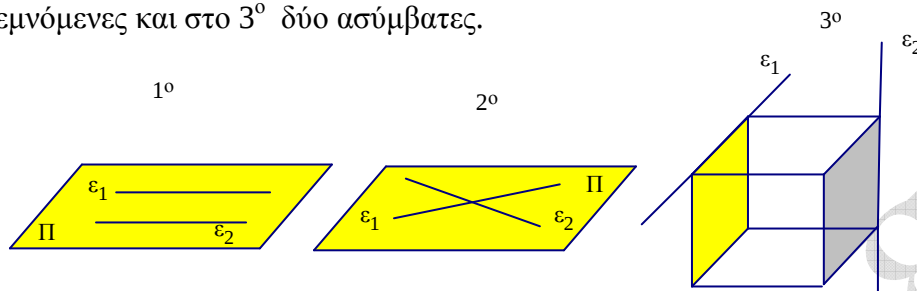
Δύο διαφορετικές ευθείες μπορεί να είναι ή **παράλληλες** ή να **τέμνονται** ή να είναι **ασύμβατες**.

**Παράλληλες** είναι όταν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο.

**Τέμνονται** όταν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

**Ασύμβατες** είναι όταν βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα

Στα παρακάτω σχήματα στο πρώτο φαίνονται δύο παράλληλες ευθείες, στο 2<sup>ο</sup> δύο τεμνόμενες και στο 3<sup>ο</sup> δύο ασύμβατες.



5.

**Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου**

Μία ευθεία μπορεί ή να **περιέχεται** σε ένα επίπεδο, ή να είναι **παράλληλη** στο επίπεδο, ή να **τέμνει** το επίπεδο σε ένα μόνο σημείο.

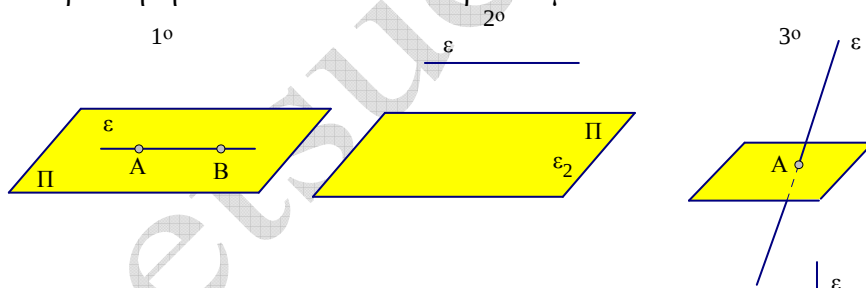
Η ευθεία **περιέχεται** στο επίπεδο όταν **δύο** σημεία της είναι σημεία του επιπέδου.

Η ευθεία είναι **παράλληλη** στο επίπεδο όταν **δεν** έχει κοινά σημεία με το επίπεδο.

Η ευθεία **τέμνει** το επίπεδο όταν **έχει** με το επίπεδο **ένα μόνο** κοινό σημείο.

Στην τελευταία περίπτωση το κοινό σημείο το λέμε **ίχνος** της ευθείας στο επίπεδο.

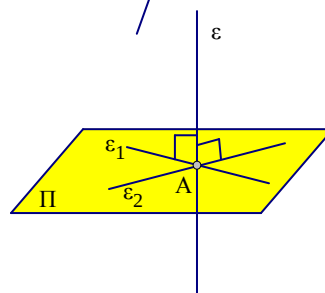
Στα παρακάτω σχήματα, στο πρώτο η ευθεία περιέχεται στο επίπεδο, στο δεύτερο είναι παράλληλη στο επίπεδο και στο τρίτο τέμνει το επίπεδο



6.

**Ευθεία κάθετη σε επίπεδο**

Μία ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο όταν είναι κάθετη σε δύο ευθείες που διέρχονται από το ίχνος της



7.

**Απόσταση σημείου από επίπεδο** : Λέμε το κάθετο τμήμα που φέρουμε από το σημείο στο επίπεδο.

8.

**Απόσταση παραλλήλων επιπέδων :** Ονομάζεται η απόσταση ενός σημείου του ενός επιπέδου από το άλλο επίπεδο .

## ΣΧΟΛΙΑ

1.

**Ευθεία σε επίπεδο :** Αν μία ευθεία ανήκει σε ένα επίπεδο τότε όλα τα σημεία της ανήκουν στο επίπεδο αυτό.

2.

**Ευθεία κάθετη σε επίπεδο:** Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο τότε είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το ίχνος της.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με ένα (Σ) αν είναι σωστές και με ένα (Λ) αν είναι λανθασμένες.

- α) Από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα. Λ
- β) Αν μία ευθεία βρίσκεται σε ένα επίπεδο τότε μόνο δύο σημεία της ευθείας βρίσκονται στο επίπεδο. Λ
- γ) Από δύο σημεία διέρχεται ένα μόνο επίπεδο. Λ
- δ) Απόσταση ενός σημείου Α από ένα επίπεδο Π ονομάζεται το κάθετο τμήμα που φέρουμε από το Α στο Π. Σ
- ε) Δύο ευθείες που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο είναι παράλληλες Λ
- στ) Αν μια ευθεία δεν ανήκει σε ένα επίπεδο τότε είναι παράλληλη σε αυτό Λ
- ζ) Απόσταση δύο παραλλήλων επιπέδων ονομάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα με άκρα ένα σημείο του ενός επιπέδου και ένα σημείο του άλλου επιπέδου. Λ
- η) Μία ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο όταν είναι κάθετη σε μία ευθεία του επιπέδου που περνάει από το ίχνος της. Λ
- θ) Δύο ευθείες κάθετες στο ίδιο επίπεδο είναι παράλληλες. Σ
- ι) Δύο ευθείες ενός επιπέδου μπορεί να είναι ασύμβατες. Λ

### Προτεινόμενη λύση

- α) Λάθος, διέρχεται μόνο ένα.
- β) Λάθος, όλα τα σημεία της βρίσκονται στο επίπεδο.
- γ) Λάθος, από δύο σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία και από την ευθεία αυτή διέρχονται άπειρα επίπεδα.
- δ) Σωστό, όπως προκύπτει από τη θεωρία.
- ε) Λάθος, οι παράλληλες ευθείες βρίσκονται πάντα στο ίδιο επίπεδο.
- στ) Λάθος, μπορεί να τέμνει το επίπεδο σε ένα σημείο.
- ζ) Λάθος, είναι το κάθετο τμήμα που φέρνουμε από ένα σημείο του ενός προς το άλλο
- η) Λάθος, πρέπει να είναι κάθετη σε δύο ευθείες που περνάνε από το ίχνος της.

- θ) Σωστό, διότι είναι κάθετες στην ευθεία που διέρχεται από τα ίχνη τους.  
 ι) Λάθος οι ασύμβατες βρίσκονται πάντα σε διαφορετικά επίπεδα.

2.

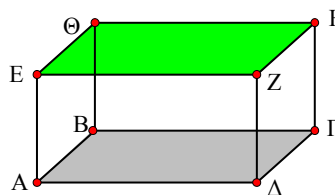
Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να βρείτε

- α) Ευθείες που είναι παράλληλες στην AB  
 β) Ευθείες κάθετες στη ΔΓ  
 γ) Ευθείες ασύμβατες με την ΕΘ

**Προτεινόμενη λύση**

- α) ΔΓ, ΖΗ, και ΕΘ  
 β) ΑΔ, ΒΓ, ΖΔ και ΗΓ  
 γ) ΑΔ, ΒΓ, ΖΔ και ΗΓ

Θεωρία 4



3.

Οι διαστάσεις του διπλανού ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι  $ΑΔ = α$ ,  $ΔΓ = β$  και  $ΑΕ = γ$ .

- α) Να δείξετε ότι ισχύει  $ΕΓ^2 = α^2 + β^2 + γ^2$   
 β) Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΕΓ όταν  $α = 3$ ,  $β = 4$  και  $γ = 12$

**Προτεινόμενη λύση**

α)

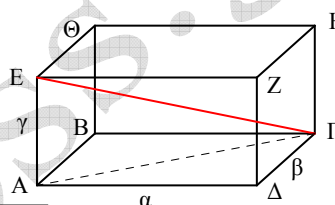
Πυθαγόρειο στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ :  $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = α^2 + β^2$  (1)

Πυθαγόρειο στο ΕΑΓ :  $ΕΓ^2 = ΑΕ^2 + ΑΓ^2 \stackrel{(1)}{=} γ^2 + α^2 + β^2$

β)

Για  $α = 3$ ,  $β = 4$  και  $γ = 12$  έχουμε  $ΕΓ^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2 = 169$   
 άρα  $ΕΓ = \sqrt{169} = 13$

Σχόλιο 2



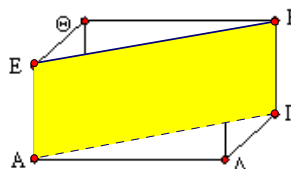
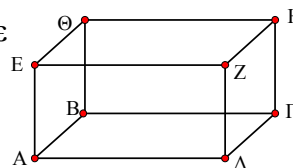
4.

Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, να σχεδιάσετε το επίπεδο που ορίζεται από τις παράλληλες ευθείες ΕΗ και ΑΓ και να βρείτε την τομή αυτού με τα επίπεδα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ.

**Προτεινόμενη λύση**

Θεωρία 2

Είναι το κίτρινο επίπεδο του διπλανού σχήματος. Οι τομές αυτού με τα επίπεδα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι οι ευθείες ΑΓ και ΕΗ αντίστοιχα.



5.

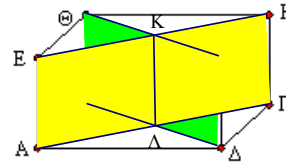
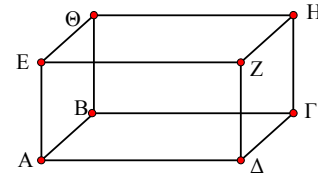
Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, να σχεδιάσετε τα επίπεδα που ορίζονται από τις παράλληλες ευθείες  $EH$  και  $AG$  καθώς επίσης και από τις  $B\Delta$  και  $\Theta Z$  και να βρείτε την τομή αυτών.

**Προτεινόμενη λύση**

Είναι τα κίτρινο και πράσινο επίπεδα του διπλανού σχήματος.

Η τομή τους είναι η ευθεία  $KL$

Θεωρία 2-3



6.

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι ημιευθείες  $OA$ ,  $OB$ ,  $OG$  οι οποίες δεν βρίσκονται και οι τρεις στο ίδιο επίπεδο.

Να σχεδιάσετε τα επίπεδα που ορίζονται από τις ημιευθείες και να βρείτε την τομή καθενός με τα υπόλοιπα.

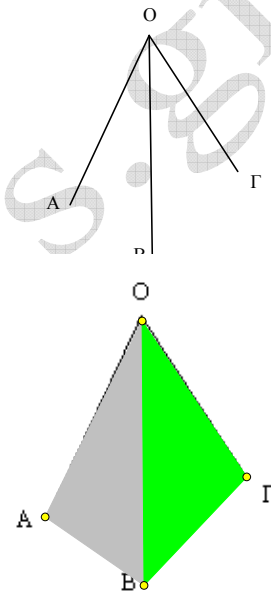
**Προτεινόμενη λύση**

Είναι τα γκριζο, πράσινο και το τρίτο που δεν φαίνεται και το οποίο ορίζεται από τις ημιευθείες  $OA$  και  $OG$ .

Τομή του γκριζου με το πράσινο είναι η  $OB$ .

Τομή του γκριζου με αυτό που δεν φαίνεται είναι η  $OA$ .

Τομή του πράσινου με αυτό που δεν φαίνεται είναι η  $OG$ .



7.

Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα  $AA'$  και  $BB'$  είναι οι αποστάσεις των  $A$  και  $B$  από το επίπεδο  $\Pi$ .

Αν είναι  $AA' = 15$ ,  $BB' = 12$  και  $AB = 5$ , να υπολογίσετε το τμήμα  $A'B'$ .

**Προτεινόμενη λύση**

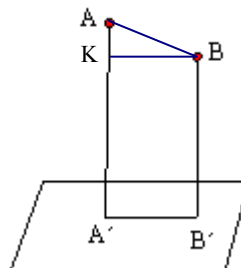
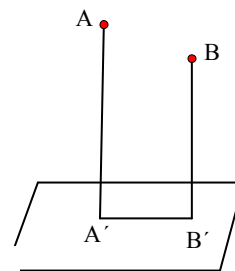
Φέρουμε το τμήμα  $BK \perp AA'$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } AK &= AA' - KA' = \\ &= AA' - BB' = \\ &= 15 - 12 = 3 \end{aligned}$$

Πυθαγόρειο στο ορθογώνιο τρίγωνο

$$\begin{aligned} \text{AKB : } KB^2 &= AB^2 - AK^2 = \\ &= 25 - 9 = 16 \end{aligned}$$

Άρα  $KB = 4$  και αφού το  $KBB'A'$  είναι ορθογώνιο θα είναι και  $A'B' = 4$ .



8.

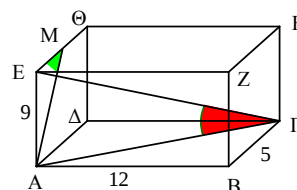
Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι

$AB = 12$ ,  $B\Gamma = 5$  και  $AE = 9$ .

Το  $M$  είναι το μέσο του  $E\Theta$ .

Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών

$\widehat{E\Gamma A}$  και  $\widehat{E\hat{M}A}$



**Προτεινόμενη λύση**

$$\begin{aligned} \text{Πυθαγόρειο στο ορθογώνιο τρίγωνο } AB\Gamma: \quad AG^2 &= AB^2 + B\Gamma^2 = \\ &= 12^2 + 5^2 = \\ &= 144 + 25 = 169 \end{aligned}$$

$$\text{άρα } AG = 13$$

$$\text{Από το ορθογώνιο τρίγωνο } E\Gamma A \text{ έχουμε ότι } \varepsilon\varphi \widehat{E\Gamma A} = \frac{9}{13} \approx 0,6923$$

Και με τη βοήθεια πινάκων βρίσκουμε ότι  $\widehat{E\Gamma A} = 35^\circ$

$$\text{Στο ορθογώνιο τρίγωνο } EMA \text{ είναι } EM = 2,5 \text{ και } \varepsilon\varphi \widehat{E\hat{M}A} = \frac{9}{2,5} = 3,6$$

$$\text{Οπότε } \widehat{E\hat{M}A} = 72^\circ$$

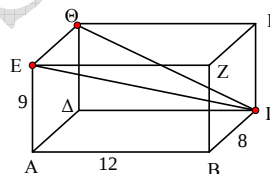
9.

Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι

$AB = 12$ ,  $B\Gamma = 8$  και  $AE = 9$ .

α) Να εξηγήσετε γιατί η  $E\Theta$  είναι κάθετη στη  $\Theta\Gamma$ .

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών και τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου  $E\Theta\Gamma$ .



Σχόλιο 2

**Προτεινόμενη λύση**

α)

Είναι  $E\Theta \perp \Theta H$  και  $E\Theta \perp \Theta \Delta$  άρα  $E\Theta \perp$  στο επίπεδο  $\Theta H \Delta \Gamma$ .

Συνεπώς  $E\Theta \perp \Theta \Gamma$

β)

$$\begin{aligned} \text{Πυθαγόρειο στο } \Theta \Delta \Gamma: \quad \Theta \Gamma^2 &= \Theta \Delta^2 + \Delta \Gamma^2 = \\ &= 9^2 + 12^2 = \\ &= 81 + 144 = 225 \end{aligned}$$

$$\text{άρα } \Theta \Gamma = 15$$

$$\begin{aligned} \text{Πυθαγόρειο στο } E\Theta \Gamma: \quad E\Gamma^2 &= E\Theta^2 + \Theta \Gamma^2 = \\ &= 8^2 + 15^2 = 289 \end{aligned}$$

$$\text{άρα } E\Gamma = 17 \text{ και } E\Theta = 8$$

$$\varepsilon\varphi \widehat{\Theta \hat{\Gamma} E} = \frac{E\Theta}{\Theta \Gamma} = \frac{8}{15} \approx 0,5333 \text{ άρα } \widehat{\Theta \hat{\Gamma} E} = 28^\circ$$

$$\widehat{E\hat{\Theta} \Gamma} = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ \text{ και προφανώς } \widehat{E\hat{\Gamma} \Theta} = 90^\circ$$

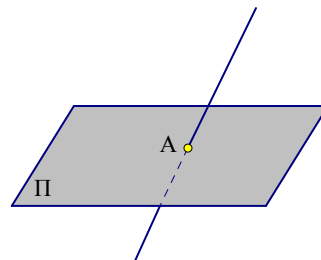
**10.**

Μία ευθεία  $\varepsilon$  έχει με ένα επίπεδο  $\Pi$  μοναδικό κοινό σημείο το  $A$ . Να εξηγήσετε γιατί η  $\varepsilon$  δεν είναι παράλληλη σε καμία ευθεία του  $\Pi$

**Προτεινόμενη λύση****Θεωρία 4**

Επειδή η  $\varepsilon$  έχει με το  $\Pi$  μοναδικό κοινό σημείο το  $A$ , η  $\varepsilon$  δεν ανήκει στο  $\Pi$ .

Επομένως δεν μπορεί να είναι παράλληλη σε καμία ευθεία του  $\Pi$



netsuccess.gr